

$\begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \end{Bmatrix}$ —2024—数理科学・物理・地球科学

専門(記述式)試験問題

注 意 事 項

- 問題は **15 題**あります。このうち**任意の 2 題**を選んで解答してください。なお、この問題集の裏表紙に科目別構成の詳細が記載されていますので、解答開始前によく読んでおいてください。
- 解答時間は **3 時間**です。
- 答案用紙の記入について
 - 答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。
 - 問題 **1 題に 1 枚**(両面)を使用してください。
 - 表側の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。
問題番号欄には、解答した問題の番号をそれぞれ記入してください。
 - 試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。
- 下書き用紙はこの問題集の**中央部**にとじ込んであります。**試験官の指示に従って、試験開始後に問題集から下書き用紙だけを慎重に引きはがして**使用してください。なお、誤って問題集を破損しても、問題集の交換はできませんので注意してください。
- この問題集で単位が明示されていない量については、全て国際単位系(SI)を用いることとします。
- この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。
- 本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集及び下書き用紙の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集から**下書き用紙以外**を切り取ったり、問題を転記したりしないでください。
- 下欄に受験番号等を記入してください。

第1次試験地	試験の区分 数理科学・物理・ 地球科学	受験番号	氏 名
--------	---------------------------	------	-----

指示があるまで中を開いてはいけません。

【No. 1】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. n, i を正の整数とする。 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。 n 次複素正方行列 A に対して

$$\operatorname{Im} A^i = \left\{ A^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n \right\}, \quad \operatorname{Ker} A^i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n \mid A^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

と定める。ただし、 $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ とする。また、 $i = 1$ のときはベキを省略して表記する。

このとき、十分大きな正の整数 k が存在し

$$\mathbf{C}^n \supseteq \operatorname{Im} A \supseteq \operatorname{Im} A^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1} = \operatorname{Im} A^{k+2} = \cdots$$

及び

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^{k+2} = \cdots$$

となることが知られている。そのような k に対して、 $I_A = \operatorname{Im} A^k$, $K_A = \operatorname{Ker} A^k$ とおくと、以下の問いに答えよ。

(1) $I_A \cap K_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことを示せ。

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。このとき B の固有値及びそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

(3) (2) で定めた B に対して、 I_B , K_B を求め、 $\mathbf{C}^3 = I_B \oplus K_B$ となることを確かめよ。

(4) n を 2 以上の整数とする。 n 次複素正方行列 $C = (c_{ij})$ における i 行 j 列成分 c_{ij} を

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = i + 1) \\ 0 & (j \neq i + 1) \end{cases}$$

と定める。このとき、 $\operatorname{Ker} C$, I_C 及び K_C をそれぞれ求めよ。

(5) 以下の(i)~(iv)の条件を全て満たす 7 次複素正方行列 D の例を一つ挙げ、その D が確かに例になっていることを示せ。

(i) $\mathbf{C}^7 \supseteq \operatorname{Im} D \supseteq \operatorname{Im} D^2 \supseteq \operatorname{Im} D^3 = \operatorname{Im} D^4 = \cdots$

(ii) $\{\mathbf{0}\} \subsetneq \operatorname{Ker} D \subsetneq \operatorname{Ker} D^2 \subsetneq \operatorname{Ker} D^3 = \operatorname{Ker} D^4 = \cdots$

(iii) $\dim \operatorname{Ker} D = 2$

(iv) $\dim I_D = 2$, $\dim K_D = 5$

II. 以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 $s, t > 0$ に対して、広義積分 $\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$ が存在することを示せ。

実数 $s, t > 0$ に対して、広義積分 $\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$ を $B(s, t)$ で表す。

- (2) $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を求めよ。
- (3) 実数 $s, t > 0$ に対して、 $B(s, t) = B(t, s)$ が成り立つことを示せ。
- (4) 実数 $s, t > 0$ に対して、

$$B(s+1, t) = \frac{s}{t} B(s, t+1), \quad B(s, t) = B(s, t+1) + B(s+1, t)$$

がそれぞれ成り立つことを示し、これらの関係式を用いて

$$B(s, t+1) = \frac{t}{s+t} B(s, t)$$

が成り立つことを示せ。

- (5) m を非負整数、 n を正の整数とすると、(4)の結果を用いて

$$B\left(m + \frac{1}{2}, n\right) = \begin{cases} \frac{2^n \cdot (n-1)!(2m-1)!!}{(2m+2n-1)!!} & (m \geq 1) \\ \frac{2^n \cdot (n-1)!}{(2n-1)!!} & (m = 0) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ。ただし、正の整数 p に対して、 $(2p-1)!! = \prod_{i=0}^{p-1} (2p-1-2i)$ である。

- (6) 次の $\mathbf{R}^3$ 内の領域 V の体積を求めよ。

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^{\frac{1}{2}} + y + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}$$

【No. 2】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. n を 2 以上の整数とする。有理数係数 n 次多項式 $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbf{Q}[X]$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小分解体を K とする。 $f(X)$ の根を $t_1, t_2, \dots, t_n \in K$ とするとき、

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (t_i - t_j)^2$$

と定める。この $D(f)$ は根 $t_1, t_2, \dots, t_n$ の順序に依らずに値が決まり、また、 $D(f) \in \mathbf{Q}$ であることが知られている。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、 $D(f)$ を a_0, a_1, a_2 を用いて表せ。
- (2) $f(X) = X^3 - 2$ のとき、 $D(f)$ の値及びガロア拡大 $K/\mathbf{Q}$ のガロア群を求めよ。
- (3) $n = 3$ かつ $f(X)$ が $\mathbf{Q}$ 上既約であるとする。 $f(X)$ が一つの実根と二つの虚根をもつための必要十分条件は $D(f) < 0$ であることを示せ。また、このとき、ガロア拡大 $K/\mathbf{Q}$ のガロア群を求めよ。
- (4) $n = 3$ かつ $f(X)$ が $\mathbf{Q}$ 上既約であるとする。 $f(X)$ が相異なる三つの実根をもち、 $\sqrt{D(f)} \in \mathbf{Q}$ であるとき、ガロア拡大 $K/\mathbf{Q}$ のガロア群を求めよ。
- (5) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。また、その最小多項式を $f(X)$ とするとき、 $\sqrt{D(f)}$ の値及びガロア拡大 $K/\mathbf{Q}$ のガロア群を求めよ。

II. R を積に関する単位元 1 をもつ可換環とし、さらに、ネーター環であるとする。 m を非負整数とし、 m 次多項式 $f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m \in R[X]$ ($a_m \neq 0$) に対し、 $\text{In}(f) = a_m X^m$ と定める。また、 $R[X]$ のイデアル I に対し、 $\text{In}(I)$ を集合 $\{\text{In}(f) \mid f(X) \in I\}$ で生成される $R[X]$ のイデアルとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) R がネーター環であることの定義を述べよ。また、その定義と同値な命題を述べよ。ただし、同値であることの証明は不要である。
- (2) 多項式 $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X) \in I$ に対し、 $\{\text{In}(f_1), \text{In}(f_2), \dots, \text{In}(f_n)\}$ が $\text{In}(I)$ を生成するとき、 $\{f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)\}$ は I を生成することを示せ。
- (3) 任意の非負整数 m に対し、 I に含まれる m 次多項式の最高次の係数からなる集合 I_m は R のイデアルであることを示せ。
- (4) R の有限部分集合列 $A_0, A_1, \dots$ が存在し、任意の非負整数 m に対して和集合 $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_m$ が I_m の生成系になることを示せ。
- (5) I が単項式で生成されているとき、単項式からなる有限集合で I の生成系になるものが存在することを示せ。
- (6) (2)~(5)を用いて、 $R[X]$ がネーター環であることを示せ。

【No. 3】 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を、 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3$ に
対し、

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

で定める。このような内積を考えると、 $\mathbf{R}^3$ を $\mathbf{E}^{2,1}$ と表す。

$$\mathbf{H}^2 = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{E}^{2,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

とおく。以下の設問に答えよ。

- (1) $\mathbf{H}^2$ 内の任意の C^1 級の曲線 $\ell: [a, b] \rightarrow \mathbf{H}^2$, $\ell(t) = (l_0(t), l_1(t), l_2(t))$ に対し、

$$\left\langle \frac{d\ell}{dt}(t), \frac{d\ell}{dt}(t) \right\rangle = \frac{1}{l_0(t)^2} \left\{ \left(\frac{dl_1}{dt}(t) l_2(t) - l_1(t) \frac{dl_2}{dt}(t) \right)^2 + \left(\frac{dl_1}{dt}(t) \right)^2 + \left(\frac{dl_2}{dt}(t) \right)^2 \right\}$$

であることを示せ。

$\mathbf{H}^2$ 内の C^1 級の曲線 $\ell: [a, b] \rightarrow \mathbf{H}^2$ に対し、

$$\text{Leg}(\ell) = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{d\ell}{dt}(t), \frac{d\ell}{dt}(t) \right\rangle} dt$$

と定義する。 ℓ が区分的に C^1 級である場合は、 C^1 級である区間毎に積分し総和をとる。以後、 $\mathbf{H}^2$ 内の曲線を考える際は、全て区分的に C^1 級であるものとする。

写像 $d: \mathbf{H}^2 \times \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \inf \{ \text{Leg}(\ell) \mid \ell: [a, b] \rightarrow \mathbf{H}^2, \ell(a) = \mathbf{p}, \ell(b) = \mathbf{q} \}$$

と定める。

- (2) 任意の $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{H}^2$ に対し、

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \geq d(\mathbf{p}, \mathbf{r})$$

が成り立つことを示せ。

$\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2)$ を $q_0 \leq p_0$ を満たす $\mathbf{H}^2$ の点とし、 $p_0 = c$ とおく。 $\ell: [a, b] \rightarrow \mathbf{H}^2$ を $\ell(a) = \mathbf{p}$, $\ell(b) = \mathbf{q}$ を満たす曲線とする。また、 $\delta = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ とおく。

- (3) 曲線 ℓ が任意の $t \in [a, b]$ に対して $l_0(t) < 2c$ を満たすならば、 $\text{Leg}(\ell) \geq \frac{\delta}{2c}$ が成り立つことを示せ。

- (4) 任意の曲線 ℓ に対し、 $\text{Leg}(\ell) \geq \min \left\{ \frac{\delta}{2c}, \log_e 2 \right\}$ が成り立つことを示せ。

- (5) d が $\mathbf{H}^2$ 上の距離関数であることを示せ。

$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。正則な n 次実正方行列全体を $GL_n(\mathbf{R})$ とする。また、

$$O^+(2, 1) = \{A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2} \in GL_3(\mathbf{R}) \mid {}^t A J A = J, a_{00} \geq 1\},$$

$$SO^+(2, 1) = \{A \in O^+(2, 1) \mid \det A = 1\},$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A & \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(\mathbf{R}), \det A = 1, {}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と定める。ただし、 ${}^t A$ は A の転置行列、 $\det A$ は A の行列式を表す。なお、必要ならば、これらの集合が行列の積に関して群をなし、 $GL_3(\mathbf{R})$ の部分群となることを用いてよい。

- (6) $\mathbf{H}^2$ の元を縦ベクトルとみなすとき、行列の左からの積により、 $O^+(2, 1)$ は $\mathbf{H}^2$ に作用することを示せ。また、任意の $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{H}^2$ と $A \in O^+(2, 1)$ に対し、 $d(A\mathbf{p}, A\mathbf{q}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ が成り立つことを示せ。
- (7) $SO^+(2, 1)$ は $\mathbf{H}^2$ に推移的に作用することを示せ。なお、必要ならば、 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = -1$ を満たす任意のベクトル $\mathbf{p} \in \mathbf{E}^{2,1}$ に対して、 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ かつ $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{p} \rangle = 0$ を満たす $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{E}^{2,1}$ が必ず存在することを用いてよい。
- (8) $\mathbf{H}^2$ は群作用による商空間 $SO^+(2, 1)/SO(2)$ と同型であることを示せ。

$\mathbf{H}^2$ 内の測地線とは、曲線 $\ell: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{H}^2$ (又はその像) で、任意の $a < b$ に対して $d(\ell(a), \ell(b)) = \text{Leg}(\ell|_{[a, b]})$ を満たすものであり、測地線 $\ell: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{H}^2$ が点 $\mathbf{p}$ を通るとは、 $\ell(c) = \mathbf{p}$ を満たす $c \in \mathbf{R}$ が存在することである。ただし、 $\ell|_{[a, b]}$ は ℓ の $[a, b]$ への制限を表す。

- (9) 異なる 2 点 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{H}^2$ を通る測地線は、原点 $(0, 0, 0)$ と $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ の 3 点を含む $\mathbf{E}^{2,1}$ 内の平面と $\mathbf{H}^2$ の交わりであることを示せ。なお、必要ならば、任意の 2 点を通る測地線が一意的に存在することを用いてよい。
- (10) 任意の $\mathbf{p} \in \mathbf{H}^2$ と、 $\mathbf{p} \in \mathbf{H}^2$ を通らない任意の測地線 L に対して、「 $\mathbf{p} \in \mathbf{H}^2$ を通り、かつ L と共有点をもたない測地線」が無数に存在することを示せ。

【No. 4】 $f, f_1, f_2, \dots : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ とし、任意の $x \in [0, 1]$ に対して $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が成り立つとする。以下の I ~ IV の設問に答えよ。

I. 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の正の整数 n に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} 4nx & \left(0 \leq x < \frac{1}{4n}\right) \\ -4nx + 2 & \left(\frac{1}{4n} \leq x < \frac{1}{2n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ 2x - 1 & \left(\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}\right) \\ -2x + 2 & \left(\frac{3}{4} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

とするとき、 $f(x)$ を求めよ。

(2) 任意の正の整数 n 及び任意の $x \in [0, 1]$ に対して

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(n! \pi x)$$

とするとき、 $f(x)$ を求めよ。

II. 有界な関数 $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ に対して、 $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ と定める。任意の正の整数 n に対して f_n は有界であるとし、 $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty < \infty$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) f は有界であることを示せ。

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|_\infty - \|f_n - f\|_\infty) \leq \|f\|_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty$ が成り立つことを示せ。

(3) I (1) の f_n に対して、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|_\infty - \|f_n - f\|_\infty) < \|f\|_\infty < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty$ が成り立つことを示せ。

III. 任意の正の整数 n に対して f_n は連続であるとする。以下の問いに答えよ。

ただし、関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の整数 N が存在して、任意の $n \geq N$ 及び任意の $x \in [0, 1]$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。

(1) $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束するならば、 f は連続であることを示せ。

(2) 任意の正の整数 n 及び任意の $x \in [0, 1]$ に対して、 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ が成り立つとする。また、 f は連続であるとする。このとき、 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束することを示せ。

IV. ルベーク積分可能な関数 $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ に対して、 $\|g\|_1 = \int_0^1 |g(x)| dx$ と定める。任意の正の整数 n に対して f_n はルベーク積分可能であるとし、 $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_1 < \infty$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) f はルベーク可測であることを示せ。
- (2) f はルベーク積分可能であることを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|_1 - \|f_n - f\|_1) = \|f\|_1$ が成り立つことを示せ。

【No. 5】 本問では、基礎となる確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする。確率変数は実数値であるとし、確率変数 W の期待値を $E[W]$ で表す。以下のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問に答えよ。

Ⅰ. n を正の整数とする。確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は独立同分布で、 X_1 の確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad (x \in \mathbf{R})$$

で与えられるとする。 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ が収束する $\lambda \in \mathbf{R}$ の集合を I とし、

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} f(x) dx \quad (\lambda \in I)$$

と定める。また、 $J = I \cap (0, \infty)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) I を求めよ。

(2) $\lambda \in J$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$P(X_1 + \dots + X_n > \varepsilon n) \leq \frac{\varphi(\lambda)^n}{e^{\varepsilon \lambda n}}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\varepsilon > 0$ に対して、

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{e^{\varepsilon \lambda}} \quad (\lambda \in J)$$

と定める。 $f_\varepsilon(\lambda)$ が最小値をとる λ がただ一つ存在することを示せ。

(4) $\varepsilon > 0$ に対して、 $f_\varepsilon(\lambda)$ が最小値をとる λ を $\lambda_*(\varepsilon)$ と表す。極限值

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\lambda_*(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

を求めよ。

(5) $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき $\frac{1}{\varepsilon^\alpha} \log_e f_\varepsilon(\lambda_*(\varepsilon))$ が 0 でない実数に収束するような $\alpha \in \mathbf{R}$ と、そのときの

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \log_e f_\varepsilon(\lambda_*(\varepsilon))$$

をそれぞれ求めよ。

Ⅱ. 確率変数 Z は標準正規分布に従うとする。すなわち、 Z の確率密度関数は

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbf{R})$$

で与えられるとする。

$$M_k = E[Z^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくとき、以下の問いに答えよ。

ただし、全ての $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 M_k が存在することは証明なしに用いてよい。

(1) $m = 1, 2, \dots$ に対して、 $M_{2m} = (2m-1)M_{2(m-1)}$ が成り立つことを示せ。

(2) $m = 1, 2, \dots$ に対して、 $M_{2m} = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$ となることを示せ。

Ⅲ. 確率変数の列 $X_1, X_2, \dots$ は独立同分布であり、任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して $m_k = E[(X_1)^k]$ が存在すると仮定する。さらに、 $m_1 = 0, m_2 = 1$ であるとする。 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

とおく。 $k = 1, 2, \dots$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(Z_n)^k]$ が存在するとき、その極限値を L_k と表す。以下の問いに答えよ。

(1) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n S_n]$ を求めよ。

(2) K を 2 以上の整数とする。極限値 $L_1, L_2, \dots, L_K$ が存在するならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[X_n (S_n)^K]}{(\sqrt{n})^{K-1}}$$

も存在することを示し、その値を $L_1, L_2, \dots, L_K$ の中から必要なものを用いて表せ。

(3) K を 2 以上の整数とする。 $L_1, L_2, \dots, L_K$ が存在するならば、 L_{K+1} も存在することを示し、その値を $L_1, L_2, \dots, L_K$ の中から必要なものを用いて表せ。

(4) $k = 1, 2, \dots$ に対して、 L_k の値を求めよ。

【No. 6】 離散確率変数 X, Y に対し、エントロピーと条件付きエントロピーを以下のように定義する。

$$H(X) = - \sum_{x \in D_X} P(X = x) \log P(X = x)$$

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} P(X = x, Y = y) \log P(X = x, Y = y)$$

$$H(Y|X) = - \sum_{x \in D_X} P(X = x) \sum_{y \in D_Y} P(Y = y|X = x) \log P(Y = y|X = x)$$

ただし、 D_Z は Z の定義域とし、対数の底は 2 とする。

確率過程 $\{X_l\}$ の同時離散確率関数を $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ ($(x_1, \dots, x_n) \in D_X^n$) とする。確率変数列の任意の部分集合に関する同時分布が、インデックスに関するシフトに対して不変であるとき、すなわち $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{1+l} = x_1, \dots, X_{n+l} = x_n)$ が任意の正の整数 n, l 及び全ての $x_1, \dots, x_n \in D_X$ に対して成り立つとき、確率過程が定常であるという。また、 $n = 1, 2, \dots$ に対して $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$ が全ての $x_1, \dots, x_{n+1} \in D_X$ に対して成り立つとき、離散確率過程 $X_1, \dots$ はマルコフ連鎖をなすという。以下の設問に答えよ。

(1) $\log x \leq (x - 1) \log e$ を示せ。ただし、 e はネイピア数とする。

(2) 二つの離散確率関数 $P(X), Q(X)$ ($X \in D_X = \{1, \dots, d\}$) に対し、

$$D(P, Q) = \sum_{x \in D_X} P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$
 とする。 $D(P, Q) \geq 0$ を示せ。ただし、 $0 \log 0 = 0$ とする。

(3) $H(X) - H(X|Y) \geq 0$ を示せ。また、定常過程において、 $H(X_n | X_{n-1}, \dots, X_1)$ は n に関して非増加であることを示せ。

(4) $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$ を示せ。また、 $H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1)$ を示せ。

(5) $D_X = \{a, b\}$ に値をとり、 $P(X_{n+1} = a | X_n = a) = 1 - \alpha$, $P(X_{n+1} = b | X_n = b) = 1 - \beta$ であるような 2 状態マルコフ連鎖を考える。このマルコフ連鎖の定常分布を $P(X = a) = \mu_a$, $P(X = b) = \mu_b$ とするとき、 μ_a, μ_b を α, β を用いて表せ。ただし、 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ とする。

確率過程 $\{X_l\}$ のエントロピーレートを $R(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, \dots, X_n)$ で定義する。

(6) $X_1, X_2, \dots$ は $D_X = \{1, \dots, d\}$ に値をとる独立で同分布に従う (すなわち、i.i.d.) 確率変数であるとする。エントロピーレート $R(X)$ を $P(X_1 = x)$ ($x \in D_X$) で表せ。また、 $R(X)$ の最大値を求め、 d を用いて表せ。

(7) 定常マルコフ連鎖に対して、エントロピーレートが $R(X) = H(X_2 | X_1)$ となることを示せ。

(8) (5) で示されたような定常マルコフ連鎖に対するエントロピーレートを計算せよ。また、エントロピーレートの最大値と、そのときの α, β を求めよ。

C を m 種類のアルファベットからなる集合とし、 C 中のどのアルファベットが出現するかを当てるゲームを行う。初期スコアを 1 とし、プレイヤーは保持している全てのスコアをアルファベット $X \in C$ に $b(X)$ の割合で賭け、当たった場合には賭けたスコアの m 倍のスコアを受け取るとする。

このゲームを n 回連続で行ったとき出現した記号を $X_1, \dots, X_n$ とし、 $X_1, \dots, X_n$ に各々 $Q(X_1), Q(X_2|X_1), \dots, Q(X_n|X_1, \dots, X_{n-1})$ の割合で賭けたときに得られるスコアを $S_n(X_1, \dots, X_n) = m^n Q(X_1, \dots, X_n)$ とする。ここで、 $Q(X_i|X_1, \dots, X_{i-1})$ は i 回目のゲームでアルファベット $X_i \in C$ に賭ける割合 $\left(\sum_{X_i \in C} Q(X_i|X_1, \dots, X_{i-1}) = 1 \right)$ であり、プレイヤーの戦略を表している。確率過程 $\{X_i\}$ は定常であるとし、確率過程 $\{X_i\}$ のエントロピーレートを $R(X)$ とする。

$$(9) \quad E \left[\log \frac{S_n(X_1, \dots, X_n)}{n} \right] = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in C^n} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \frac{\log S_n(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{n} \quad \text{と}$$

して、 $R(X) \leq \log m - E \left[\log \frac{S_n(X_1, \dots, X_n)}{n} \right]$ を示せ。なお、定常過程 $\{X_1, \dots, X_n\}$ に対して、

$$\frac{H(X_1, \dots, X_n)}{n} \leq \frac{H(X_1, \dots, X_{n-1})}{n-1} \quad \text{であることを用いてよい。}$$

【No. 7】 以下の設問に答えよ。

感染症の流行の数理モデルである SIR モデルでは、人口集団を感受性(susceptible)、感染性(infectious)、回復(recovered)の 3 状態に分割する。初期状態での全人口を N として、それぞれの状態の時間発展を以下の微分方程式で記述する。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma I(t) + \frac{\beta S(t)I(t)}{N} \quad \dots\dots ②$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

ここで、 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ はそれぞれ、時刻 t において感受性をもつ者(未感染者)、感染している者、回復した者の人口である。また、 β は感染しやすさを表す定数で、周囲に感染者がいなくて一人の感染者が微小時間 Δt に感染させる人数は、 $\beta \Delta t$ と見積もられる。 γ は回復率である。ひとたび回復した人は再感染しないと仮定する。このモデルをモデル 1 とする。

- (1) モデル 1 では、全人口 $N = S(t) + I(t) + R(t)$ が時間変化しないことを示せ。
- (2) 時刻 $t = 0$ において少数の感染者が発生したとする。感染流行初期における $I(t)$ の時間変化は、 $S(t)$ の減少効果が無視できるほど小さいため、次の方程式で記述できる。

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left(\frac{\beta S_0}{N} - \gamma \right) I(t)$$

ここで、 S_0 は時刻 $t = 0$ における $S(t)$ の値である。

- (a) 初期条件を $I(0) = I_0$ として、この微分方程式を解け。
- (b) 感染流行が拡大する条件、すなわち初期感染人口が指数関数的に増加する条件を求めよ。
- (3) モデル 1 のダイナミクスは (S, I) の 2 次元力学系によって決定される。
- (a) 式①及び②から次式が得られることを示せ。

$$\frac{dI}{dS} = \frac{S_{\text{cr}}}{S} - 1 \quad \dots\dots ③$$

ただし、 $S_{\text{cr}} = \frac{\gamma N}{\beta}$ である。

- (b) 式③の積分より、 $I(t)$ と $S(t)$ の関係式が得られる。 $I(t)$ を $S(t)$ 及び I_0 、 S_0 、 S_{cr} を用いて表せ。
- (c) $I(t)$ の最大値を、 I_0 、 S_0 、 S_{cr} を用いて表せ。

次に、人口の流入及び流出がある場合を考え、感染症の流行を以下の微分方程式で記述する。

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= bN - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -(\mu + \gamma)I(t) + \frac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\mu R(t) + \gamma I(t)\end{aligned}$$

ただし、 b 及び μ は正のパラメータとする。また、全人口 $N = S(t) + I(t) + R(t)$ は一定値を保つとする。このモデルをモデル 2 とする。

(4) 全人口 N が一定値を保つための条件を求めよ。

(5) b と μ がそれぞれ何を表すのかを、次の語句の中から必要なものを用いて説明せよ。

ただし、解答中の用いた語句に下線を引くこと。

〔語句： 流入率、流出率、拡大、収束、人口〕

(6) 人口集団がまだ免疫を持っていないものとし、時刻 $t = 0$ において少数の感染者が発生したとする。このとき、 $S_0 \approx N$ と近似できることを用いて、感染流行が拡大する条件を求めよ。

(7) モデル 2 では、感染流行が拡大する条件が満たされる場合には、 $S(t)$ も $I(t)$ も一定値となる定常的な状態に近づいていく。その定常状態での S と I をそれぞれ求めよ。

(8) モデル 2 において、流入人口に対してある割合 a でワクチン接種を行うとする。ただし、ワクチン接種を受けたものは感染せず、回復状態のものと同一視できると仮定する。

(a) この場合のモデルを微分方程式で記述せよ。

(b) 感染者のいない定常状態での S 及び R を求めよ。

(c) 少数の感染者が発生しても感染流行が拡大しなくなるワクチン接種割合の条件を求めよ。

【No. 8】 頂点集合を V 、辺集合を E とする有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。各辺 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{i,j} > 0$ 及び単位流量当たりの費用 $c_{i,j}$ が与えられる。また、各頂点 $i \in V$ に需要あるいは供給を表す量 b_i が与えられているとする。ただし、 $b_i > 0$ のとき頂点 i はネットワークの供給点で、 b_i はその供給量を表し、 $b_i < 0$ のとき頂点 i は需要点で、 $|b_i|$ はその需要量を表す。需要と供給は全体でバランスが取れている、すなわち $\sum_{i \in V} b_i = 0$ を満たすと仮定する。このとき、辺 $(i, j) \in E$ を流れるフローの量を変数 $x_{i,j}$ で表すと、総費用を最小にするようなフローを求める最小費用流問題は以下の線形計画問題に定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j} \\ & \text{subject to} && \sum_{j: (i,j) \in E} x_{i,j} - \sum_{k: (k,i) \in E} x_{k,i} = b_i \quad (i \in V) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ & && 0 \leq x_{i,j} \leq u_{i,j} \quad ((i,j) \in E) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで、各頂点の流量保存制約①と各辺の容量制約②を満たすフローを可能流という。

各辺 $(i, j) \in E$ を流れるフローの量 $x = \{x_{i,j} | (i, j) \in E\}$ を与えたときに、各辺の変更可能なフローの量を表す残余ネットワーク $\tilde{G}(x) = (V, \tilde{E}(x))$ を定義する。残余ネットワークでは、フローを戻すことを表すために、各辺 $(i, j) \in E$ に対して、逆向き枝 (j, i) を用意する。この逆向き枝の集合を $E^R = \{(j, i) | (i, j) \in E\}$ とする。各頂点の組 $(i, j) \in V \times V$ に対して、辺 $(i, j) \in V \times V$ の残余容量 $\tilde{u}_{i,j}(x)$ 、残余ネットワークの費用 $\tilde{c}_{i,j}$ を

$$\tilde{u}_{i,j}(x) = \begin{cases} u_{i,j} - x_{i,j} & (i, j) \in E \\ x_{j,i} & (i, j) \in E^R \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad \tilde{c}_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & (i, j) \in E \\ -c_{j,i} & (i, j) \in E^R \end{cases}$$

と定義する。残余ネットワークの辺集合を $\tilde{E}(x) = \{(i, j) \in E \cup E^R | \tilde{u}_{i,j}(x) > 0\}$ と定義する。以下の設問に答えよ。

(1) 次の補題 1 を証明せよ。

補題 1：可能流 x に対する残余ネットワーク上の一つの有向閉路の辺集合を C とする。この有向閉路に沿って十分小さな値 ε だけ更新したフローを x' 、すなわち

$$x'_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j} + \varepsilon & (i, j) \in C \cap E \\ x_{i,j} - \varepsilon & (j, i) \in C \cap E^R \\ x_{i,j} & \text{その他} \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

とすると、 x' は可能流であり、費用に関して

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x'_{i,j} - \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j} = \varepsilon \sum_{(i,j) \in C} \tilde{c}_{i,j}$$

が成り立つ。

(2) 最小費用流問題の制約条件①、②それぞれに対応する双対変数 $y_i, z_{i,j}$ を導入し、双対問題を記述せよ。

- (3) 頂点 $i \in V$ に対応する双対変数 y_i はポテンシャルと呼ばれる。各辺 $(i, j) \in E \cup E^R$ に対して、簡約費用 $c_{i,j}^y$ を $c_{i,j}^y = \tilde{c}_{i,j} + y_i - y_j$ で定義する。有向閉路 C で、有向閉路に含まれる辺の費用和 $\sum_{(i,j) \in C} \tilde{c}_{i,j}$ が負となるときの、この閉路を負閉路という。次の定理 2 は、最小費用流問題に対する最適性条件である。

定理 2：可能流 x に対して、以下は同値である。

- (i) フロー x は最小費用流問題の最適解である。
- (ii) フロー x に対する残余ネットワークに負閉路は存在しない。
- (iii) フロー x に対する残余ネットワーク上でどの辺の簡約費用も非負となるようなポテンシャルが存在する。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (a) (i) $\Rightarrow$ (ii) を証明せよ。
- (b) (ii) $\Rightarrow$ (iii) を証明せよ。
- (c) (iii) $\Rightarrow$ (i) を証明せよ。

- (4) 補題 1 と定理 2 より、次の最小費用流問題に対する負閉路消去法が考えられる。

アルゴリズム 1 負閉路消去法

可能流 x を求め、 x に対する残余ネットワークを作る

while 残余ネットワーク $\tilde{G}(x)$ に負閉路が存在 do

 負閉路を一つ取り出し、その辺集合を C とする

$\varepsilon \leftarrow \min \{ \tilde{u}_{i,j}(x) \mid (i,j) \in C \}$

C に沿ってフロー x を式③で定義した x' を用いて $x \leftarrow x'$ と更新し、残余ネットワークも更新

end while

一方、定理 2 の(iii)の条件に基づいた最短路繰り返し法も考えられる。

ここで、 $e_i(x) = b_i - \left(\sum_{j: (i,j) \in E} x_{i,j} - \sum_{k: (k,i) \in E} x_{k,i} \right)$ とする。アルゴリズム 2 の㉗、㉘に当てはまる適切な記述を示せ。

アルゴリズム 2 最短路繰り返し法

$c_{i,j} \geq 0$ ならば $x_{i,j} = 0$ 、 $c_{i,j} < 0$ ならば $x_{i,j} = u_{i,j} ((i,j) \in E)$ 、 $y_i = 0 (i \in V)$ とする

while $e_l(x) > 0$ である頂点 l が存在 do

$\tilde{G}(x)$ の辺 $(i,j) \in \tilde{E}(x)$ の簡約費用を辺 (i,j) の長さとして l から各頂点 $i \in V$ への最短経路長 $d(i)$ を求める

各頂点 $i \in V$ のポテンシャルを $y_i \leftarrow y_i + d(i)$ と更新

$e_k(x) < 0$ である頂点 $k \in V$ を選び、 l から k への最短経路の枝集合を P とする

$\varepsilon \leftarrow \min \{ \text{㊦} \}$

P に沿ってフロー x を $x'_{i,j} = \text{㊧}$ で定義した x' を用いて $x \leftarrow x'$ と更新

残余ネットワークも更新

end while

(5) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 5)\}$,

$u_{1,2} = 20$, $u_{1,3} = 40$, $u_{2,5} = 40$, $u_{3,2} = 10$, $u_{3,4} = 50$, $u_{4,2} = 20$, $u_{4,5} = 30$,

$c_{1,2} = 3$, $c_{1,3} = 7$, $c_{2,5} = 3$, $c_{3,2} = 2$, $c_{3,4} = 3$, $c_{4,2} = 4$, $c_{4,5} = 8$,

$b_1 = -50$, $b_5 = 50$, $b_2 = b_3 = b_4 = 0$

のとき、最小費用流問題を解き、最適解と最適値をその根拠とともに記述せよ。

【No. 9】 力学及び電磁気学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 力学に関する以下の問いに答えよ。

図の左側のように、水平な粗い床の上に、半径 a 、質量 M の一様密度の球が静止している。時刻 $t = 0$ において、床面に平行に球の重心 G に向かって撃力を加えたところ、重心 G は速さ v_0 で運動を始め、時刻 $t = t_1$ 以降は速さ v_1 で等速直線運動を行った。

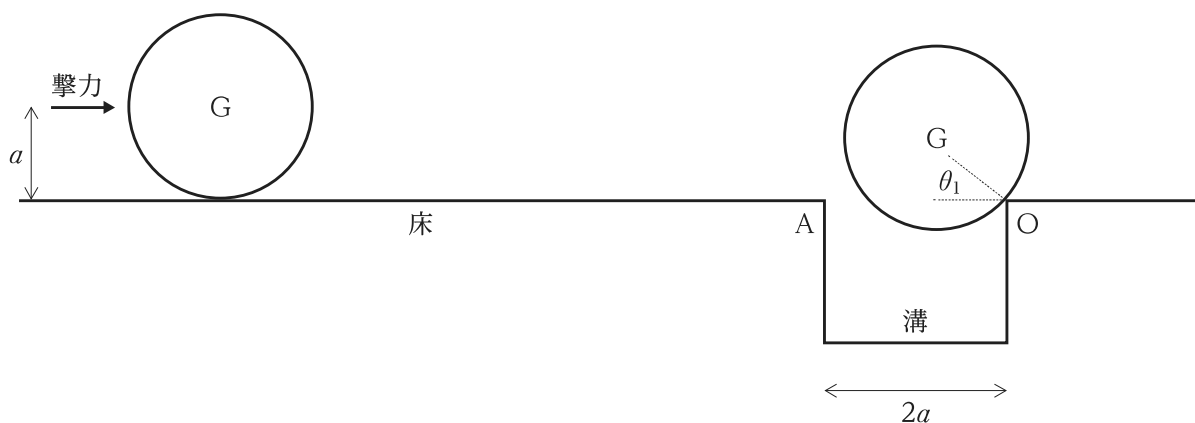
ただし、重心まわりの球の慣性モーメントは $I_G = \frac{2}{5}Ma^2$ であり、床と球の間の動摩擦係数を μ' 、重力加速度の大きさを g とする。また、空気抵抗は無視できるものとする。

(1) 時刻 t における重心 G の速さを $v(t)$ とし、重心まわりの角速度の大きさを $\omega(t)$ とする。

$0 < t < t_1$ における、球の重心運動及び重心まわりの回転運動に関する運動方程式を書け。

(2) (1)で求めた運動方程式の解を求めよ。

(3) t_1 及び v_1 を、 v_0 、 μ' 、 g のうち必要なものを用いて表せ。



その後、上記のように重心 G が速さ v_1 で等速直線運動を行いながら、球は幅 $2a$ の溝に進入した。球は溝の角の点 A を通過して、図の右側のようにもう一方の角の点 O と完全非弾性衝突をした。衝突直後における線分 AO と線分 OG がなす角度を θ_1 とすると、 $\sin \theta_1 = \frac{3}{5}$ であった。点 O は十分に粗く、球は点 O と一点で接触を保ちながら、点 O まわりに回転運動を行った。

(4) v_1 を a 及び g を用いて表せ。

(5) 球が点 O と衝突する直前における、重心 G の点 O まわりの角運動量の大きさを求めよ。

(6) 球が点 O と衝突した直後における、重心 G の点 O まわりの角速度の大きさを $\frac{v_2}{a}$ とする。

衝突直前と直後における点 O まわりの角運動量保存の式を導出し、 v_2 を a 及び g を用いて表せ。ただし、点 O まわりの球の慣性モーメントは $I_O = \frac{7}{5}Ma^2$ である。

(7) 球が点 O と衝突した後の時刻 t における線分 AO と線分 OG がなす角度を $\theta(t)$ とする。

衝突後のエネルギー保存の式を導出し、球が溝を越えて運動を続けるか溝に落ちるかを答えよ。

II. 電磁気学に関する以下の問いに答えよ。ただし、虚数単位を i とする。

電離層での電磁波の伝播と反射について考える。電離層は電子と正イオンで構成され、高周波電磁波に対しては正イオンは動かず、電子だけが動けるとしてよい。電離層では、電場 $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ 、電流密度 $\mathbf{J}$ に対するマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

と書ける。ここで、 ε_0 、 μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、透磁率であり、 ε_0 、 μ_0 と光速 c の間には、 $c^{-2} = \varepsilon_0 \mu_0$ の関係がある。電離層の電子数密度を N 、電子の質量と電荷をそれぞれ m 、 $-e$ とする。

(1) $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ が成り立っているとき、 $\mathbf{E}$ に対する次の方程式

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

を導け。ただし、 σ は複素電気伝導率である。

(2) 電離層内を z 方向に伝播する波数 k 、角周波数 ω の電磁波の電場を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ として、分散関係 (k と ω の関係) を求めよ。なお、一般に k は複素数である。

(3) $z = 0$ 付近で、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ が高周波電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-i\omega t]$ の下での電子の運動によって生じるとしたとき、電子の運動方程式を考えることにより、 σ を ω と N の関数として求めよ。

ただし、電子どうし及び電子とイオンの衝突は無視できるものとする。また、電子の速さは光速 c に比べて十分小さいとし、電磁波の磁場による項は無視できるものとしてよい。

(4) (3) で求めた σ を用いたときの複素屈折率 $n \left(\equiv \frac{kc}{\omega} \right)$ が 0 となる角周波数 ω_p を N の関数として求めよ。なお、 ω_p はプラズマ角周波数と呼ばれる。

(5) 角周波数 ω の電磁波を、地上から電離層に入射角 θ で入射させたところ、電磁波は反射された。このような状況を満たす N の下限を ω と θ を用いて表せ。

ただし、空気の屈折率は 1 とし、電離層の入射面は平面としてよい。

【No. 10】 量子力学に関する以下の設問に答えよ。ただし、虚数単位を i とする。

デルタ関数型のポテンシャル $V(x) = -U_0\delta(x)$ に束縛された質量 m 、エネルギー E の電子について考える。ただし、 $U_0 > 0$, $E < 0$ である。

- (1) この系の電子の波動関数 $\psi(x)$ が従うシュレディンガー方程式を書け。
- (2) 波動関数及びその空間微分が $x = 0$ で満たすべき接続条件を書け。
- (3) この系がもつ対称性を考えると、領域 $x > 0$ と領域 $x < 0$ の波動関数 $\psi(x)$ は互いに関係付けることができる。その関係が成り立つ理由について説明し、波動関数を求めよ。ただし、 $\kappa = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$ とし、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $\psi(x) \rightarrow 0$ となることを考慮せよ。
- (4) 束縛状態の波動関数の概形を図示せよ。
- (5) 束縛状態のエネルギー E を m , U_0 , $\hbar$ を用いて表せ。

次に、二つのデルタ関数からなるポテンシャル $V(x) = -U_0[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$ に束縛された質量 m 、エネルギー E の電子について考える。ただし、 $U_0 > 0$, $E < 0$ である。

- (6) $x < -a$, $-a < x < a$, $x > a$ の各領域について、波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。規格化はしなくてもよい。ただし、 $\kappa = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$ とし、(3)と同様の考察を行い、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $\psi(x) \rightarrow 0$ となることを考慮せよ。
- (7) 波動関数及びその空間微分が $x = \pm a$ において満たすべき接続条件を用いて、 κ を決定するための式を求めよ。
- (8) 束縛状態が二つ得られるための条件を求めよ。
- (9) (8)の条件を満たす二つの束縛状態の波動関数の概形を図示せよ。
- (10) (8)の条件を満たす二つの束縛状態のうち、エネルギーが低い状態はどちらであることを理由とともに説明せよ。

【No. 11】 統計力学及び物性物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 黒体輻射に関する以下の問いに答えよ。

一辺の長さが L の立方体の箱の中に閉じ込められた電磁波を考える。電磁波の電場の振幅を $u(t; x, y, z)$ とすると、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(t; x, y, z)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(t; x, y, z)$$

を満たす。ただし、電磁波には二つの偏光方向がある。ここで、 c は光速である。

- (1) ここでの電磁波はいろいろな角振動数をもつ波の重ね合わせである。波数ベクトル $\mathbf{k}$ 、角振動数 $\omega(\mathbf{k})$ をもつ電磁波の分散関係 (k と $\omega(\mathbf{k})$ の関係) を求めよ。ただし、 $k = |\mathbf{k}|$ である。
- (2) 箱の壁で $u(t; x, y, z) = 0$ となる境界条件の下で電磁波の固有状態の波数ベクトル $\mathbf{k}$ を求め、それが離散化されていることを示せ。
- (3) (1) で求めた $\omega(\mathbf{k})$ が角振動数 ω より低い電磁波の固有状態の数 $N(\omega)$ を求めよ。
- (4) 角振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間の単位体積当たりの電磁波の状態密度 $D(\omega)$ を求めよ。
- (5) 角振動数 ω の固有状態の電磁波のエネルギーは $n\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) をとる。この電磁波が温度 T の熱平衡状態にあるとき、角振動数 ω の固有振動の平均エネルギーを求めよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とする。
- (6) (4) で求めた状態密度を利用して、この箱の中の輻射の単位体積当たりの全エネルギーを求め、それが T^4 に比例することを示せ。

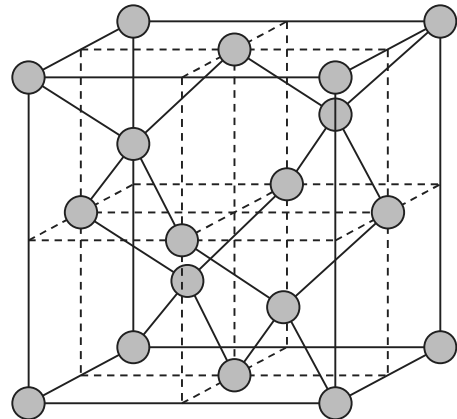
なお、必要ならば、次の定積分を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

II. 半導体に関する以下の問いに答えよ。

シリコン(Si)結晶はダイヤモンド型結晶構造をもつ。

ダイヤモンド型結晶構造は、二つの面心立方格子を $\langle 111 \rangle$ 方向に対角線長の $\frac{1}{4}$ だけずらした構造とみなせる。図は、その単位格子の模式図である。



- (1) この単位格子中に何個の Si 原子が含まれているか答えよ。

Si 結晶中に、不純物として 5 価のリン(P)原子を少量だけドーピングすると、P 原子は Si 原子と置換してダイヤモンド型結晶格子に組み込まれる。P 原子は、最隣接の 4 個の Si 原子と共有結合を作るが、余った価電子 1 個が、正イオン P^+ とみなせる P 原子に束縛されてその周りを周回する。

- (2) この状況をボーアの水素原子様モデルで近似して考える。このとき、遠心力とクーロン力の釣り合いと量子化条件から、基底状態における電子のエネルギー準位及び軌道半径を求めよ。ただし、Si の誘電率を ϵ 、電子の有効質量を m^* 、電気素量を e とせよ。

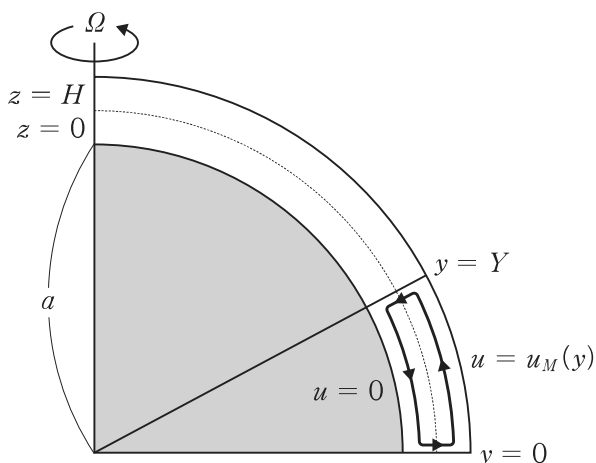
Si 結晶の格子定数は 0.54 nm 、誘電率は $\epsilon = 12\epsilon_0$ (ϵ_0 は真空の誘電率)、電子の有効質量は $m^* = 0.33m_0$ (m_0 は電子の静止質量)である。また、水素原子のイオン化エネルギー(基底状態の電子を無限遠まで引き離すのに必要なエネルギー)は 13.6 eV であり、水素原子でのボーア半径は 0.053 nm である。これらの数値を用いて、以下の問いに有効数字 2 桁で答えよ。

- (3) (2)で求めた軌道半径の値を求めよ。
- (4) この軌道半径の球に含まれる Si 原子数を求めよ。
- (5) ある温度以上では、基底状態にある電子が P^+ による束縛から逃れて伝導電子として振る舞い、結晶全体が伝導性をもつ。このように伝導電子となるために必要なエネルギー(イオン化エネルギー)の値を求めよ。
- (6) P 原子を高濃度にドーピングすると、 P^+ を中心として(2)で求めた軌道半径の球どうしが接するようになり、そこにいる電子が隣の P^+ の軌道に飛び移るようになる。それによって「不純物バンド」が形成され、極低温でも伝導性をもつようになる(絶縁体金属転移)。このような現象が起こる P 原子のドーピング濃度を求めよ。
- (7) 上述のようにドーピングされた電子の振る舞いをボーアの水素原子様モデルによって考えたが、そこで得られたイオン化エネルギーや絶縁体金属転移が起こる不純物濃度の値は実験値と同程度となっている。このようにこのモデルが有効である理由、及びこのモデルの限界を考察せよ。

【No. 12】 地球物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 地球大気には、ハドレー循環と呼ばれる、低緯度に閉じた子午面循環が見られる。ここでは乾燥大気の東西一様な定常状態を考え、ハドレー循環の南北幅の説明を試みる。

図のように、地球を半径 a の球とし、地球の自转角速度を Ω 、赤道から北向きの地面に沿った距離を y 、高度を z とし、ハドレー循環の南北幅を Y で表す。緯度を ϕ として $y = a\phi$ である。また、対流圏大気の水平運動を 2 層の大気で考え、それぞれの層の代表的高度を $z = 0$ 及び $z = H$ とする。



以下の議論は、角運動量(angular momentum)の保存と温度風の関係から実現可能な温位の南北プロファイル $\theta_M(y)$ の形を求めた後、それと独立に放射平衡(radiative equilibrium)を満たす温位プロファイル $\theta_E(y)$ を仮定し、最後に両者の関係を用いて各種パラメータを決定するという流れで進む。南北対称のモデルであるので、議論を北半球に限定する。

(1) 対流圏上層では、地表による摩擦が働かないため、地球の自転軸周りの角運動量が保存される。赤道上($y = 0$)において地面に対して静止している空気塊を、地球の自転軸周りの角運動量を保ったまま高緯度側に移動した場合の東向き風速を $u_M(y)$ と書くこととし、 $u_M(y)$ を求めよ。低緯度において $y \ll a$ が成り立つことを用いて、 y の多項式の形で答えよ。なお、図中では大気の厚みを強調しているが、自転軸からの距離に対する H の寄与は考えない。

(2) 今考えている定常状態において、以下の四つの式が成り立っているとする。

$$\text{地衡風の関係} \quad fu = -g \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_p$$

$$\text{状態方程式} \quad p = \rho RT$$

$$\text{静力学平衡の関係} \quad \frac{\partial z}{\partial p} \Big|_y = -\frac{1}{\rho g}$$

$$\text{温位の定義} \quad T = \theta \left(\frac{p}{p_r} \right)^{R/C_p}$$

ここで、 u は東向き風速、 g は重力加速度の大きさ、 $f = 2\Omega \sin \phi$ はコリオリパラメータ、 p は気圧、 ρ は大気の密度、 R は気体定数、 T は気温、 θ は温位、 C_p は空気の等圧比熱、 p_r は参照気圧(定数)である。

これらの式を用いて、気圧座標系における温度風の式①を導け。

$$f \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \dots\dots ①$$

- (3) 式①を高度座標系に変換した後、全球の対流圏で平均した温位 θ_0 を用いて線形化すること
で次の式②が得られる。

$$f \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \dots\dots ②$$

対流圏下層では大気は摩擦により十分に減速され、東西方向の対地速度が無視できるとする
($u(y)_{z=0} = 0$)。また、対流圏上層では(1)で求めた東西風速の南北プロファイルが成立してい
るとする($u(y)_{z=H} = u_M(y)$)。さらに、これら二層の間では、厚み H にわたって式②で表さ
れる温度風の関係が成立しているものとする。

温位が高度方向に一様であるとし、赤道上の温位を θ_{M0} としたとき、低緯度 $y \ll a$ におけ
る各緯度の温位 $\theta_M(y)$ が次の式③で近似的に表せることを示せ。

$$\theta_M(y) = \theta_{M0} - \frac{\Omega^2 \theta_0}{2a^2 g H} y^4 \quad \dots\dots ③$$

続いて、放射平衡による温位の南北プロファイルを考える。赤道上の放射平衡温位を θ_{E0} 、赤
道と極の放射平衡温位の差を $\Delta\theta$ として、各緯度の放射平衡温位 θ_E が

$$\theta_E(\phi) = \theta_{E0} - \Delta\theta \sin^2 \phi \quad \dots\dots ④$$

の形で書けると仮定する。低緯度 $y \ll a$ においては、これは次のように近似できる。

$$\theta_E(y) = \theta_{E0} - \frac{\Delta\theta}{a^2} y^2 \quad \dots\dots ⑤$$

最後に、ハドレー循環の南北幅 Y を求めるため、角運動量保存から導いた θ_M を放射平衡温位
 θ_E に関連付ける。ハドレー循環の外側(高緯度側)では放射平衡が成り立っており、ハドレー循
環の高緯度端において温位の連続 $\theta_M(Y) = \theta_E(Y)$ が成り立っているとする。また、ハドレー循
環の内部では熱収支が釣り合っており、適当な仮定の下で $\int_0^Y \theta_M(y) dy = \int_0^Y \theta_E(y) dy$ が成り
立っているとする。

- (4) Y を、 θ_0 , $\Delta\theta$, g , a , H , Ω のうち必要なものを用いて表せ。また、 $\theta_0 = 260 \text{ K}$, $\Delta\theta = 40 \text{ K}$,
 $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a = 6400 \text{ km}$, $H = 10 \text{ km}$, $\Omega = 2\pi \text{ day}^{-1}$ であるとして Y の大きさを概算
せよ。

- (5) $\theta_{E0} - \theta_{M0}$ を、 θ_0 , $\Delta\theta$, g , a , H , Ω のうち必要なものを用いて表せ。

- (6) y を横軸、 θ を縦軸にとり、 $\theta_M(y)$ と $\theta_E(y)$ の概形を、両者の違いが分かるように $y = 0$ か
ら $y = Y$ までの範囲で図示せよ。ただし、 $\theta_M(y)$ を実線、 $\theta_E(y)$ を破線で一枚のグラフに描く
こと。ここでは、 Y や θ_{E0} , θ_{M0} の具体的な値は問わない。

II. 水平東向きが x 、水平北向きが y 、鉛直上向きが z となるように局所直交座標系をとる。地球の回転及び曲率を考慮した大気の x 、 y 方向の運動方程式はそれぞれ次のようになっている。

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi + \frac{uw}{a} - \frac{uv \tan \phi}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_u \quad \dots\dots ⑥$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{vw}{a} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_v \quad \dots\dots ⑦$$

ここで、 t は時間、 u 、 v 、 w は x 、 y 、 z 方向の風速、 Ω は地球の自転角速度、 ϕ は緯度、 a は地球半径、 ρ は大気の密度、 p は気圧、 F_u 、 F_v は u 、 v に働く摩擦力である。 $\frac{D}{Dt}$ はラグランジュ微分

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ であり、動粘性係数 ν を用いて $F_u = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ 、

$F_v = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$ である。

(1) 北半球中緯度 ($\phi \sim 45^\circ$) における対流圏自由大気の、総観規模の運動を考える。 $2\Omega \sin 45^\circ = 2\Omega \cos 45^\circ = f_0$ とする。

(i) 運動方程式の各項のおよその大きさについて、水平風速スケール U 、鉛直風速スケール W 、変動の水平長さスケール L 、変動の鉛直長さスケール H 、密度で規格化した気圧の水平変動スケール $\frac{\Delta P}{\rho}$ 及び定数 a 、 f_0 、 ν を用いて評価することを考える。表 I の [ア] ~ [オ] に当てはまるスケールをそれぞれ答えよ。A 項、G 項は例として埋めてある。A 項においては時間スケールを $\frac{L}{U}$ とし、G 項においては $H \ll L$ を用いている。符号は無視してよい。

表 I

	A 項	B 項	C 項	D 項	E 項	F 項	G 項
式⑥	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$2\Omega w \cos \phi$	$\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	F_u
式⑦	$\frac{Dv}{Dt}$	$2\Omega u \sin \phi$		$\frac{vw}{a}$	$\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	F_v
スケール	$\frac{U^2}{L}$	[ア]	[イ]	[ウ]	[エ]	[オ]	$\frac{\nu U}{H^2}$

(ii) 表 II に与えた各スケールのおよその大きさをを用いて、表 I の A 項 ~ G 項のおよその大きさを評価せよ。また、寄与の大きな方から三つの項について、その物理的意味を記せ。ここでは $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 、 $a = 10^7 \text{ m}$ を用いよ。

表Ⅱ

シンボル	意味	およその大きさ
U	水平風速スケール	$10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
W	鉛直風速スケール	$10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
L	水平長さスケール	10^6 m
H	鉛直長さスケール	10^4 m
$\frac{\Delta P}{\rho}$	密度で規格化した 気圧の水平変動スケール	$10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

ここからは、同心円状の等圧線をもつ高低気圧と、等圧線に沿う定常流を仮定する。円の中心から距離 r の点を考え、接線方向の風速を u_r とすると、動径方向の運動方程式は次のように書き直すことができる。

$$\frac{u_r^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_0 u_r = 0 \quad \dots\dots ⑧$$

ここで、反時計回りの場合に u_r を正としている。

(2) 式⑥、⑦及び(1)の結果を用いて、式⑧を導け。

式⑧で表される風を傾度風と呼ぶ。傾度風は、 r が大きい極限では遠心力が無視でき、地衡風に帰着する。地衡風近似に基づく風速を u_g とすると、運動方程式は次のようになる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_0 u_g = 0 \quad \dots\dots ⑨$$

(3) ある一定の気圧傾度力の大きさに対して式⑧と⑨を用いて風速を評価したとき、低気圧性循環では $|u_g| > |u_r|$ 、高気圧性循環では $|u_g| < |u_r|$ となることを説明せよ。ただし、北半球を例にとり、それぞれ低気圧に伴う反時計回りの風及び高気圧に伴う時計回りの風のみを考えること。

(4) 式⑧の解のうち、 r の大きな極限で地衡風に漸近するものが

$$u_r = \frac{f_0 r}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\rho f_0^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}} \right) \quad \dots\dots ⑩$$

であることを示せ。

(5) (4)で求めた傾度風 u_r が実数となるような気圧傾度の大きさ $\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|$ の範囲を、低気圧と高気圧それぞれの場合について求めよ。また、このことから低気圧と高気圧における中心付近の気圧傾度の大きさの違いについて分かることを説明せよ。

【No. 13】 地球物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 岩石力学に関する以下の問いに答えよ。

地下の岩盤に働くせん断応力(接線応力)について考える。応力場が二次元的で、 z 軸方向に働く力はなく、 z 軸方向への変化もないとする。また、 x 軸、 y 軸が主応力軸であり、 x 軸方向と y 軸方向の主応力 σ_1 , σ_2 について $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ であるとする。ここで、応力の符号は圧縮を正とする。図 I のように、 xy 平面と直交する面 Q を考え、その法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と x 軸がなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。

- (1) 三角形 OAB を断面とし、 z 軸方向に伸びる三角柱について、その側面に働く力の釣合いを考えることにより、面 Q に働く法線応力 σ_n 、せん断応力 τ を、 σ_1 , σ_2 , θ を用いて表せ。

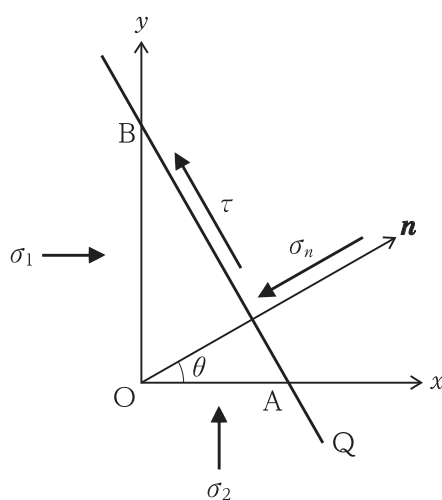


図 I

岩石の脆性破壊に関する応力状態の基準がいくつか提案されてきた。これらのうち一つはクーロン-ナビエ基準であり、これはせん断応力 τ が以下の値に達すると破壊が起こるというものである。

$$|\tau| = S + \mu\sigma_n \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

ここで、 S は岩石のせん断強度、 μ は内部摩擦係数、 σ_n は法線応力である。

- (2) $|\tau| - \mu\sigma_n$ が最大となるときの、角 θ を求める式を表せ。
 (3) $|\tau| - \mu\sigma_n$ が最大となるとき、式①を、 S , μ , σ_1 , σ_2 を用いて書き直せ。

II. 断層から放射される地震波に関する以下の問いに答えよ。

密度 ρ 、P 波速度 α 、S 波速度 β の均質等方無限弾性体中に面積 S の断層が存在する。断層の中心は座標原点 O に一致し、時刻 $t = 0$ に $z = 0$ 平面上の断層に x 方向のすべりが生じるとする。断層は小さく、断層上での破壊伝播の効果を無視できる場合、十分遠方の観測点 $\mathbf{x}(x, y, z)$ での時刻 t における P 波と S 波の変位ベクトル $\mathbf{u}^P$ と $\mathbf{u}^S$ は、それぞれ次のように表される。

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{A}^{FP}}{4\pi\rho\alpha^3|\mathbf{x}|} \dot{M}_0\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}\right) \quad \dots\dots ②$$

$$\mathbf{u}^S(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{A}^{FS}}{4\pi\rho\beta^3|\mathbf{x}|} \dot{M}_0\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{\beta}\right) \quad \dots\dots ③$$

ここで、 $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 、 $M_0(t)$ は地震モーメントの時間関数である。ドットは関数の時間微分を表す。剛性率を μ 、断層でのすべり時間関数を $D(t)$ とすれば、

$$M_0(t) = \mu D(t) S$$

と書くことができる。 $\mathbf{A}^{FP}$ と $\mathbf{A}^{FS}$ は、それぞれ P 波と S 波の遠方での放射特性を示し、次のように与えられる。

$$\mathbf{A}^{FP} = \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{A}^{FS} = \sin 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$\hat{\mathbf{r}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ は、図 II に示す極座標系 (r, θ, ϕ) における単位ベクトルである。

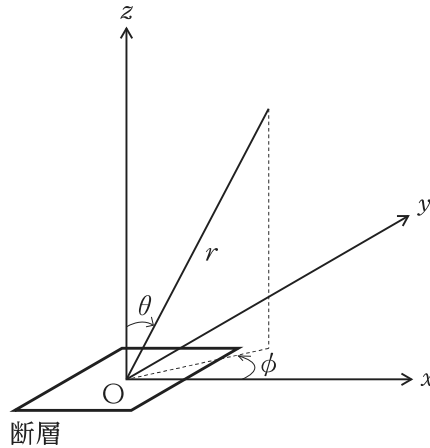
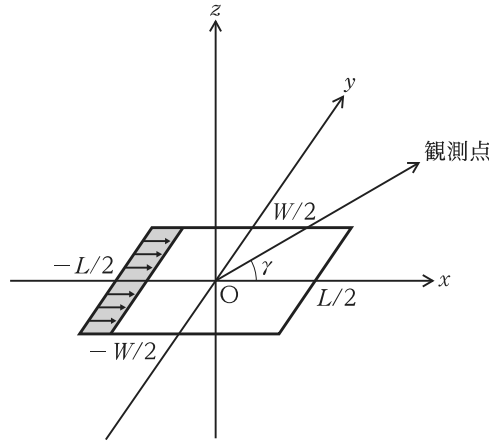


図 II

- (1) P 波と S 波の遠方での放射特性の大きさが同じ地点において、S 波の振幅は P 波のおよそ何倍か求めよ。ただし、 $\alpha = \sqrt{3}\beta$ とする。
- (2) 観測点の位置によって、P 波の変位の向き(極性)が震源から遠ざかる場合(押し)と震源に向かう場合(引き)とがある。 θ と ϕ によって、P 波の変位の向きがどのように変化するかを、座標原点 O を中心とする球面上での極性(押し引き)分布を図示することにより説明せよ。ただし、 $\dot{M}_0 \geq 0$ とする。

次に、断層が有限の長さを持ち、破壊伝播の効果を考慮した場合に、断層から放射される地震波について考える。以下では、S波のみ扱うことにする。

図Ⅲのように、断層は $z = 0$ 平面に存在し、 x 方向に長さ L 、 y 方向に幅 W の大きさをもつとする。座標原点 O は断層の中心にある。 $(x', y', 0)$ を断層上の点としたとき、断層上のこの点から観測点までの距離は $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$ と書ける。 R は断層の長さや幅に比べて十分に大きいものとする ($R \gg L$, $R \gg W$)。破壊は、断層端 ($x = -L/2$) で始まり、一定速度 v ($v < \beta$) で x の正の方向に伝播するものとする。



図Ⅲ

遠方の観測点での S 波変位は、破壊伝播の効果を考慮して式③を断層上で積分することにより求められるので、次のように書ける。

$$\mathbf{u}^S(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi\rho\beta^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \int_{-W/2}^{W/2} dy' \mathbf{A}^{\text{FS}} \frac{\dot{D}\left(t - \frac{x'}{v} - \frac{R}{\beta}\right)}{R}$$

断層の長さや幅は観測点までの距離に比べて十分小さいため、距離減衰や放射特性は断層中心での値で代表できるものとする。また、断層幅が小さいときには、座標原点 O から観測点に向かう方向と破壊伝播の方向 ($+x$ 方向) とのなす角を γ とすると、 $R \approx R_0 - x' \cos \gamma$ と近似できる。ここで、 $R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ は座標原点 (断層の中心) から観測点までの距離である。

(3) 遠方での S 波変位は次のように近似できることを示せ。

$$\mathbf{u}^S(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu \mathbf{A}^{\text{FS}} W}{4\pi\rho\beta^3 R_0} I$$

ここで、

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \dot{D}\left(t - \frac{x'}{v} - \frac{R_0 - x' \cos \gamma}{\beta}\right) dx' = \int_{-L/2}^{L/2} \dot{D}\left(t - \frac{R_0}{\beta} - \frac{\tau}{L} x'\right) dx' \quad \dots\dots ④$$

$$\tau = \left(\frac{1}{v} - \frac{\cos \gamma}{\beta}\right) L$$

である。

(4) 式④の τ はどのような意味をもつか。1 行程度で説明せよ。

(5) すべり時間関数 $D(t)$ が、次のような立ち上がり時間 T の傾斜関数

$$D(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{U}{T}t & (0 \leq t \leq T) \\ U & (t > T) \end{cases}$$

で与えられる場合 (U は定数)、式④を計算して、S 波変位波形を図示せよ。ただし、 $T < \tau$ とする。

(6) (5)の結果は、 T が非常に小さい場合には γ の値によって S 波変位波形が大きく異なることを示している。これを踏まえ、破壊の伝播方向が地震波形に及ぼす影響について 3 行程度で説明せよ。

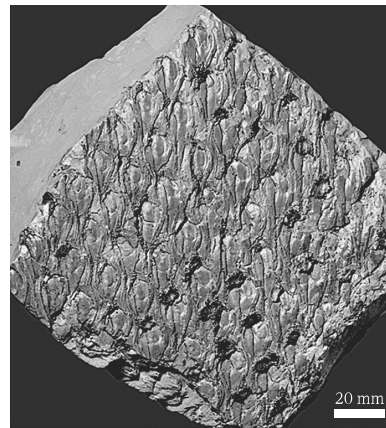
【No. 14】 地質学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 化石と地球生命進化に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 化石は、過去の生物に関する直接証拠であるが、生物の体が化石として保存される可能性には偏りがある。偏りの要因となる以下の三つの条件について、それぞれ2行程度で説明せよ。
 - (a) 生物の体そのものの特徴
 - (b) 生息環境
 - (c) 地層の分布
- (2) 石炭紀は、特にヨーロッパにおいて地層中に石炭が比較的多く含まれていることで特徴付けられる地質年代である。石炭は、分解されなかった植物体が堆積物中で地熱や圧力の影響を受け、変質してできる。
 - (a) 石炭紀の代表的な植物化石の写真を図Ⅰのア～エの中から一つ選ぶとともに、その名称を答えよ。



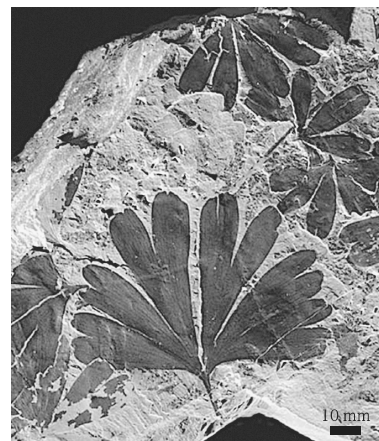
ア



イ



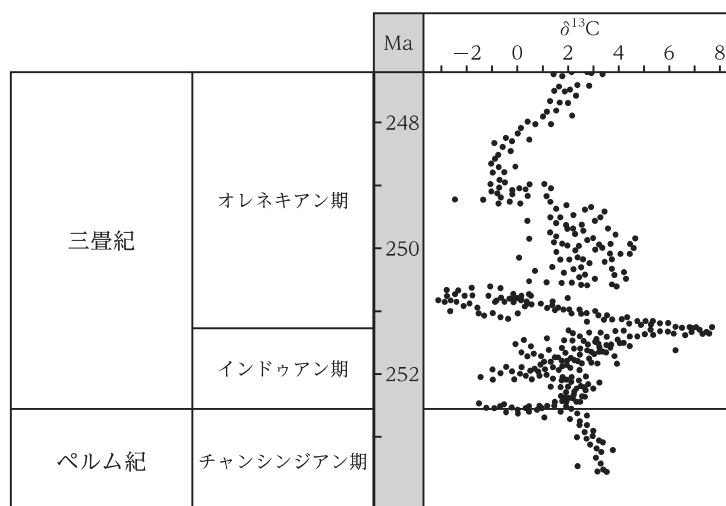
ウ



エ

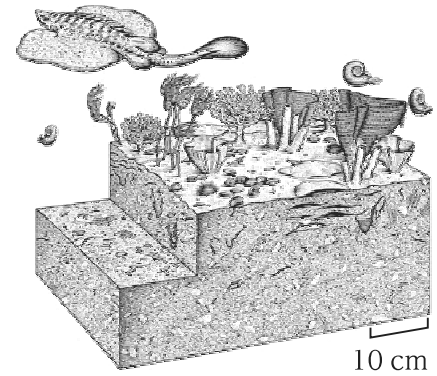
図Ⅰ

- (b) 前後の地質年代と比べて石炭紀に植物体が地層中に保存されやすかった要因として考えられる生命進化の歴史的経緯にはどのようなものがあるか、3行程度で説明せよ。
- (3) 地球生命史を通じて、生物相の構成は変化してきた。中でも、顕生代最大の大量絶滅であるペルム紀末の大量絶滅を含む5回の大量絶滅は生物相の入れ替わりに大きな影響を及ぼした。
- (a) 大量絶滅とはどのような現象であるか。他の絶滅との違いに注意しながら、1～2行で説明せよ。
- (b) 図Ⅱは、ペルム紀―三畳紀境界付近における地層中の炭素安定同位体比($^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ の標準物質との差の千分率： $\delta^{13}\text{C}$)の変動を示したものである。ペルム紀―三畳紀境界で炭素安定同位体比が負にシフトしている要因として主に考えられる現象を二つ挙げ、それぞれ2～4行で説明せよ。



図Ⅱ ペルム紀―三畳紀境界付近における地層中の炭素安定同位体比の変動

(c) 右の図は、南中国におけるペルム紀末の大量絶滅直前の海底付近の生物相と海底下の生物攪拌の様子を模式的に示したものである。生物相の多様性が高く、海底の深い層まで生物攪拌が見られ、大型の捕食動物(魚類、エイ)も生息していた。この後、大量絶滅が起き、この生態系は崩壊し、中期三畳紀にかけて生態系の複雑性の回復が進んだ。図Ⅲのア～エ



には、同地域におけるペルム紀末大量絶滅直後から中期三畳紀にかけての各時代の生物相及び生物攪拌の様子を模式的に示してある。この中から、以下の(i)～(iv)の各時代に相当する図の記号を選ぶとともに、図が示している生態系の特徴をそれぞれ1行程度で説明せよ。

- (i) 大量絶滅直後(前期三畳紀最初期)
- (ii) 前期三畳紀
- (iii) 中期三畳紀前半
- (iv) 中期三畳紀後半

著作権の関係のため、掲載できません。

II. プレーートの発散境界と収束境界に関する以下の問いに答えよ。

(1) 大洋底における最も顕著な構造の一つに中央海嶺と呼ばれる海底の大山脈があり、そこはプレート発散境界である。その総延長は7万 km を超え、地球上のマグマ生産量の60～80 % を占める。山脈の中軸部には堆積物がほとんどないことから新しい火山であると言える。中央海嶺に関する以下の問いに答えよ。

(a) 中央海嶺の形成過程について、次の語句を全て用いて5行程度で説明せよ。ただし、解答中で用いた語句に下線を引くこと。

[語句： プレート境界、マントル物質、溶融、マグマ、噴出]

(b) 図 I は、太平洋と大西洋のある場所における中央海嶺を横切る地形断面であり、中軸部(距離0 km)より両側2,000 km の範囲を示している。上下どちらの断面が太平洋あるいは大西洋の中央海嶺であるかを、それぞれの(短波長の凹凸地形を除いた)全体的な形状の特徴と合わせて5行程度で説明せよ。

(c) 図 I の地形断面には短波長の凹凸も見られる。これは中央海嶺の中軸に平行な方向に連続する地形であるが、どのような地質構造を反映したものなのか、またそれはどのように形成されたものなのか、合わせて5行程度で説明せよ。

(d) (b)で示された太平洋と大西洋の中央海嶺の形状が異なる理由を、海底拡大速度の観点から10行程度で説明せよ。なお、図 I に示された年代は、拡大速度が一定であったと仮定した場合の値である。

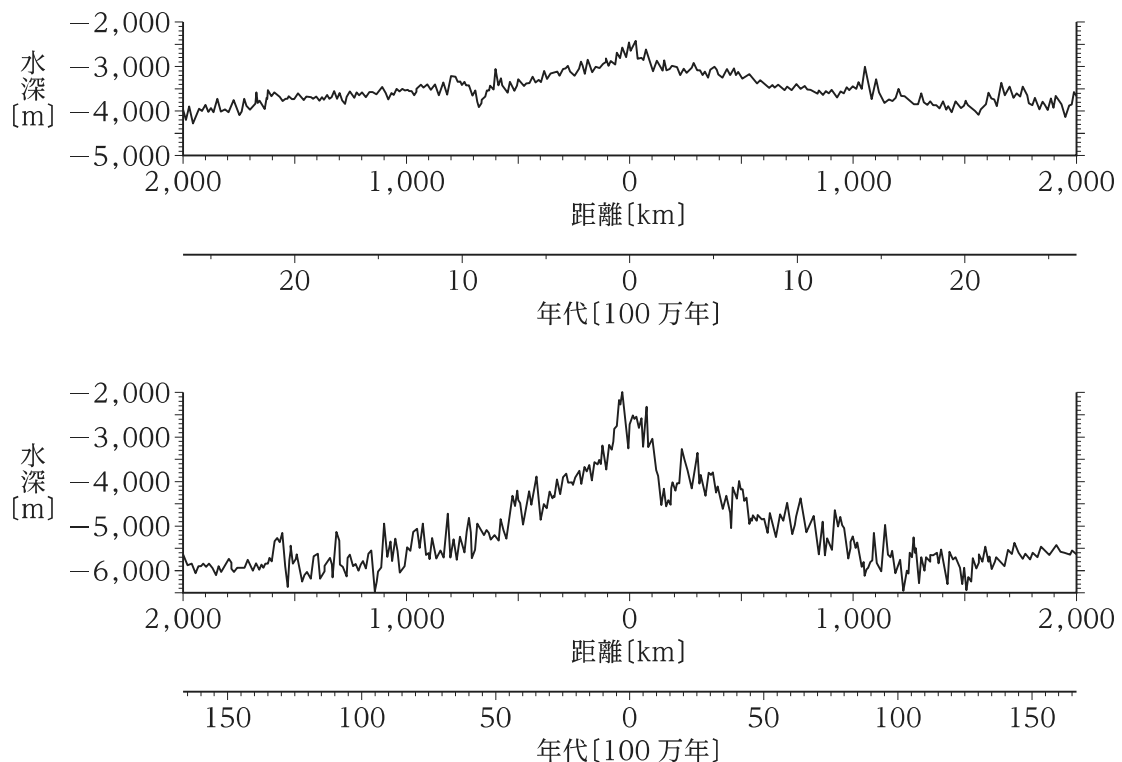


図 I 中央海嶺の地形断面図

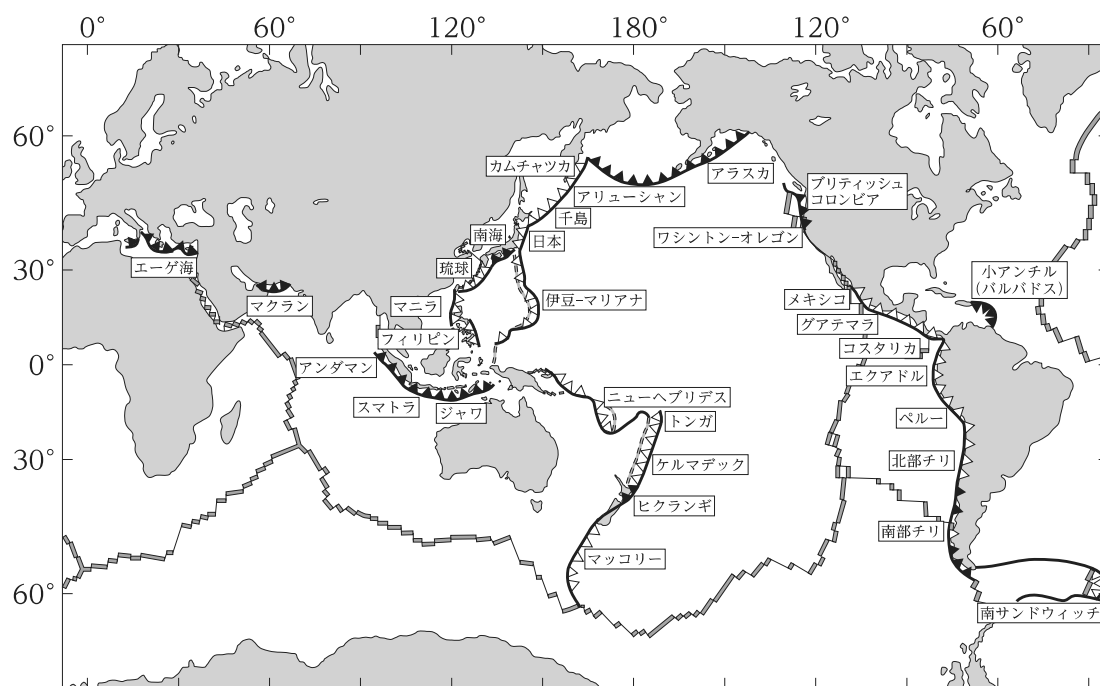
(2) プレートどうしが互いに接近し合うプレート収束境界のうち、海洋プレートが沈み込む場所は沈み込み帯と呼ばれ、火成作用・変成作用・地震活動及び造山運動など地球上で最も活動的な造構環境に置かれている。沈み込み帯に関する以下の問いに答えよ。

(a) 従来、沈み込み帯はチリ型とマリアナ型に分類されていた。これらの型はどのような分類であったのかについて、それぞれの特徴と共に、次の語句を全て用いて 10 行程度で説明せよ。ただし、解答中で用いた語句に下線を引くこと。

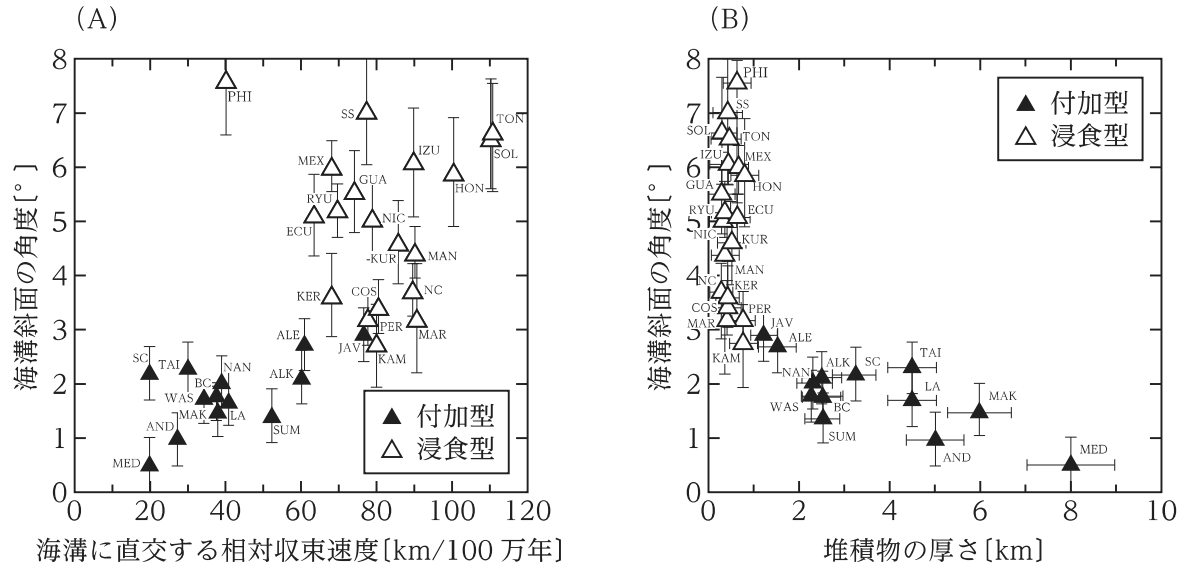
[語句： 沈み込み角度、プレート間結合度、密度、付加体、背弧、碎屑物]

(b) チリ型とマリアナ型の分類は見直され、その後、これに代わって付加型と浸食型が提唱されるようになった。分類が見直された要因を、図Ⅱを参照して5行程度で説明せよ。なお、図Ⅱには、主要な沈み込み帯(海溝)が、付加体が形成されている場所(▲印)とそれが見られない場所(△印)とあわせて示されている。

(c) 沈み込み帯における付加体の有無(付加型か浸食型)を支配する要素は、幾つか挙げられる。図Ⅲには主要な沈み込み帯における、海溝内側 50 km 以内での海溝斜面の傾斜角度に対する、海溝に直交するプレートの相対収束速度及び海溝での堆積物の厚さの関係が示されている。図からそれらの関係を読み取って、沈み込み帯が付加型と浸食型に分かれる条件を 10 行程度で説明せよ。



図II 世界の沈み込み帯と付加体の分布



ALE：アリューシャン、ALK：アラスカ、AND：アンダマン、BC：ブリティッシュ・コロンビア、COS：コスタリカ、ECU：エクアドル、GUA：グアテマラ、HON：本州(日本)、IZU：伊豆、JAV：ジャワ、KAM：カムチャツカ、KER：ケルマデック、KUR：千島(クリル)、LA：小アンチル、MAN：マニラ、MAK：マクラン、MAR：マリアナ、MED：地中海(エーゲ海)、MEX：メキシコ、NAN：南海、NC：北部チリ、NIC：ニカラグア、PER：ペルー、PHI：フィリピン、RYU：琉球、SC：南部チリ、SOL：ソロモン、SS：南サンドウィッチ、SUM：スマトラ、TAI：台湾、TON：トンガ、WAS：ワシントン-オレゴン

図Ⅲ 海溝斜面の角度に対する相対収束速度と堆積物の厚さの関係

【No. 15】 地質学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 惑星・衛星の内部構造や表層年代の推定方法に関する以下の問いに答えよ。ただし、万有引力定数は $6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ とし、計算においては、結果だけでなく導出過程も簡潔に記すこと。

(1) 惑星や衛星の組成や内部構造は、その平均密度からも推測される。

(a) 地球と月の平均密度を有効数字 2 桁で求めよ。ただし、地球と月は球と仮定し、必要に応じて次の値を用いること。

地球の表面における重力加速度の大きさ： 9.8 m/s^2 ， 地球の半径： $6.4 \times 10^6 \text{ m}$

月の表面における重力加速度の大きさ： 1.6 m/s^2 ， 月の半径： $1.7 \times 10^6 \text{ m}$

(b) 地球と月の平均密度の値が異なる理由について 2 行程度で説明せよ。

(c) (b)の説明を支持する平均密度以外の観測量を挙げ、その内容を 3 行程度で説明せよ。

(2) 限られた情報から惑星の内部構造を推定する場合の基本モデルは、球対称の 2 層構造である。

(a) 地球を、金属核と岩石層の 2 層構造であると仮定し、金属核の半径を地球半径の比として有効数字 1 桁で求めよ。ただし、地球は球と仮定し、金属核と岩石層の密度の値は、それぞれ常温常圧下における金属鉄の密度 $7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とかんらん岩の密度 $3.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ を用いよ。

(b) (a)で得られた値と、地球における実測値(~ 0.55)の違いの原因を、3 行程度で説明せよ。

(c) 土星の衛星エンケラドスは、氷で覆われている。エンケラドスが氷と岩石の 2 層からなり、半径を 250 km 、質量 $1.1 \times 10^{20} \text{ kg}$ の球であると仮定した場合、氷層の厚さを有効数字 1 桁で求めよ。ただし、氷と岩石の密度の値は、それぞれ $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ と $3.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ を用いよ。

(d) (c)で示した値及び得られた値を用いて、エンケラドスの氷層における重力加速度の大きさは表面における値と同じであると仮定し、氷層の最下部の圧力を有効数字 1 桁で求めよ。

(e) 図 I は、エンケラドスの南極付近の水蒸気などの噴出(土星探査機「カッシーニ」2009 年 11 月 21 日撮影)の様子である。この観測からエンケラドス内部の構造について示唆されることを、2 行程度で説明せよ。なお、 H_2O の相図(図 II)を用いてもよい。

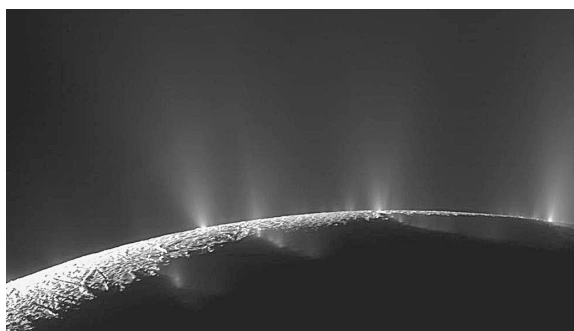


図 I

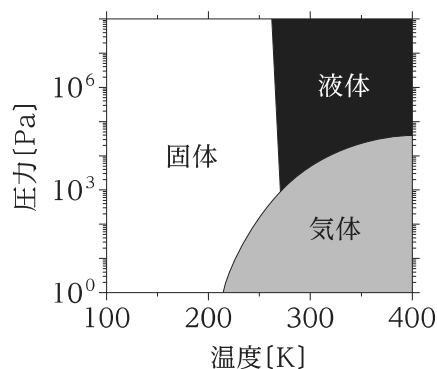
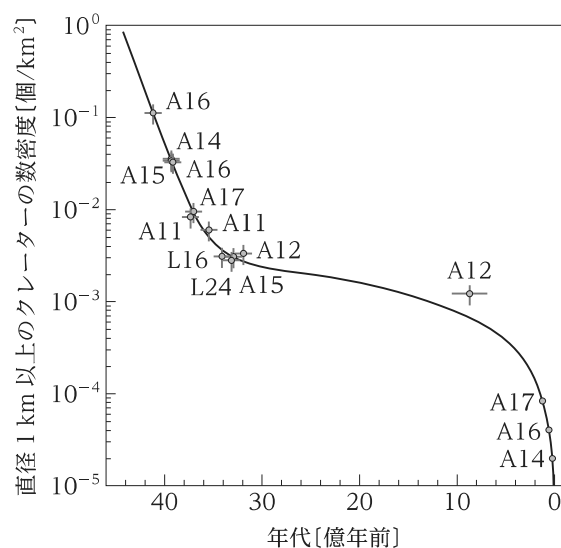


図 II

- (3) 地質学的過程を理解するためには、時間の情報を得ることは重要である。固体惑星・衛星の表面のクレーターの数密度より、その地域の年代を見積もる方法として、クレーター年代学がある。
- (a) 地質学における時間軸の重要性を、2行程度で説明せよ。
- (b) クレーター年代学の原理を、2行程度で説明せよ。
- (c) (b)で用いられている仮定を、2行程度で説明せよ。
- (d) クレーター年代は、図Ⅲ(曲線は衝突頻度曲線、横軸は月面の表面年代)のようにアポロ・ルナ計画により取得された岩石試料の放射年代と、試料採集場所のクレーターの数密度との比較によって決められている。この図から読み取ることのできる情報を、3行程度で説明せよ。
- (e) 図Ⅲより、クレーターの数密度による時代推定に適している年代を述べよ。
- (f) クレーターの数密度による時代推定の不確定性を小さくするために必要な調査はどのようなものが考えられるか、2行程度で説明せよ。



図Ⅲ

II. 地球の歴史に関する以下の問いに答えよ。

(I) イギリス、スコットランドの地質学者で近代地質学の基礎をつくったとして知られる James Hutton(1726－1797)の業績に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 図 I は、垂直な崖の露頭スケッチである。このような地質構造の名称を答えよ。
- (b) 図 II は、図 I と同種の地質構造を呈する露頭の写真である。この写真をもとに、その構造の特徴がよく分かるような露頭スケッチを描け。ただし、スケッチは 4 行の範囲に収めること。
- (c) 図 I や図 II のような構造が形成される過程について、3 行程度で説明せよ。
- (d) 「現在は過去を知る鍵である」という地球観が Hutton の考えの基本であった。図 I や図 II のような露頭の観察から、Hutton が導いた地表の変化の歴史に関する考え方を 5 行程度にまとめて説明せよ。

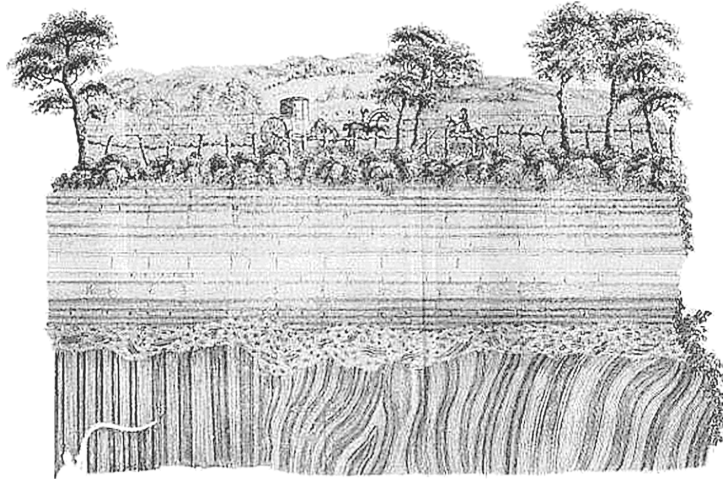


図 I 露頭スケッチ

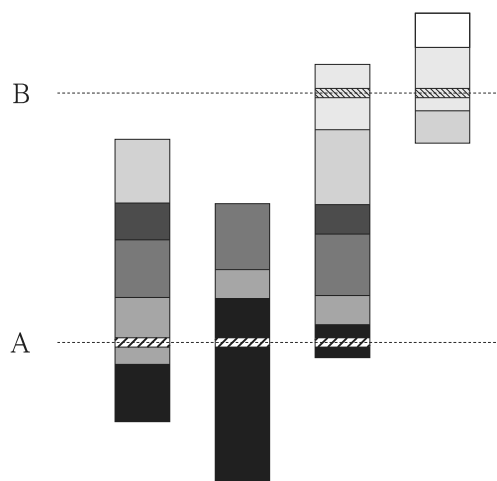


図 II 露頭写真

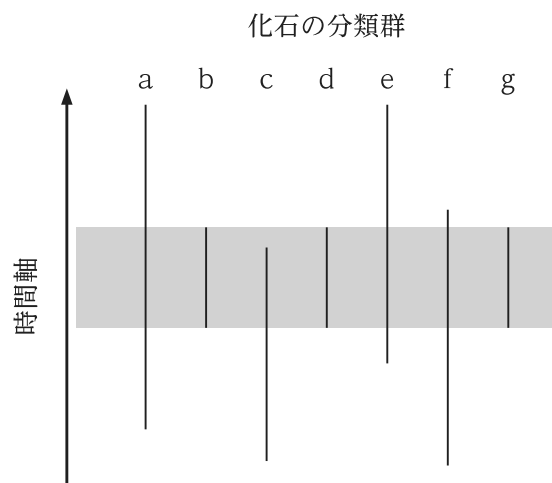
(2) 層序の対比と年代測定法に関する以下の問いに答えよ。

(a) 図Ⅲ～Ⅵは、層序と対比に関係した図である。各図が示す層序の分類名と共に、その層序による対比方法の原理と特徴について、それぞれ5行程度で説明せよ。

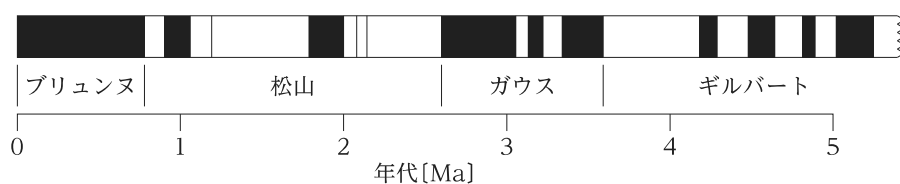
(b) 図Ⅶ及びⅧは、地層に数値年代を与える方法に関係した図である。各図が示す年代測定法の名称と共に、その年代測定法の原理と特徴について、それぞれ5行程度で説明せよ。



図Ⅲ 模式地質柱状図。同じパターンは同一の岩相を表す。



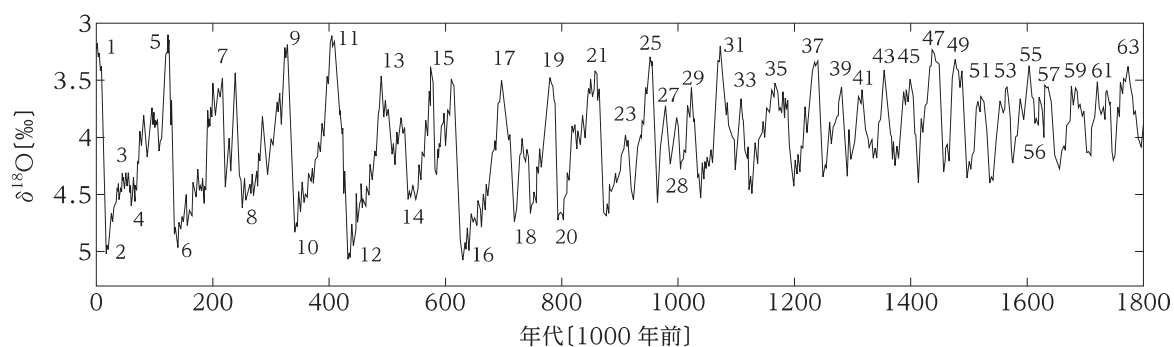
図Ⅳ 化石の産出記録と時間の関係



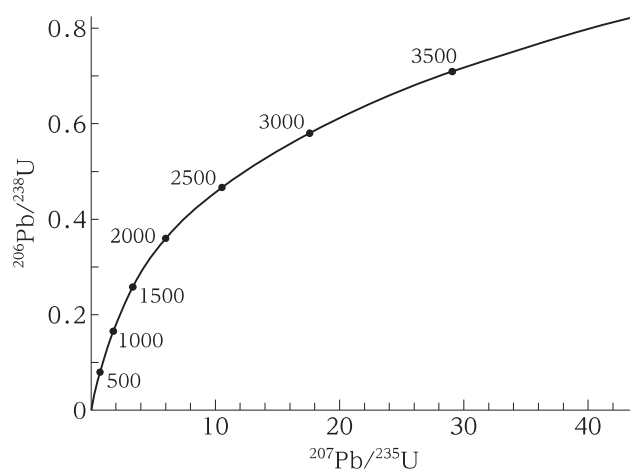
図Ⅴ 地磁気の方角とその変化

著作権の関係のため、掲載できません。

図VI 海洋性バライト(CaSO₄)の硫黄同位体比。マークの違いは観測地点の違いを表す。



図VII 底生有孔虫の酸素同位体比変動曲線



図VIII コンコーディア図

科目別構成の詳細

科 目	出 題 数	問 題 番 号	ペ ー ジ
代数、幾何、解析、確率・統計	5 題	No. 1～5	1～9
情報科学	1 題	No. 6	10～11
数学モデル	1 題	No. 7	12～13
経営工学(経営数学・生産管理・品質管理)	1 題	No. 8	14～16
古典物理学、現代物理学(物性物理学を含む。)	3 題	No. 9～11	17～21
地球物理学	2 題	No. 12, 13	22～29
地質学	2 題	No. 14, 15	30～40

○ 15 題のうちから任意の 2 題を選んで解答してください。

<出典>

・No.14-I図Iア

Introduction to Paleobiology and the Fossil Record by Michael J. Benton, David A. T. Harper
© 2009 by Michael J. Benton and David A. T. Harper. Reproduced with permission of John Wiley & Sons Limited through PLSclear.

・No.14-I図Iイ

Lepidodendron sp. bark from the Estonian Museum of Natural History

・No.14-I図Iウ

西田治文、「鋳化石から探る日本の白亜紀植物の世界」、「化石」78、2005 年所収

・No.14-I図Iエ

Photo: Autumnal fossil leaf accumulation of Ginkgo cordilobata (from Ginkgo in Australia) by Yvonne Arremo. Reproduced with permission of Naturhistoriska Riksmuseet.

・No.14-I図II

Reprinted from Impacts of Global warming on Permo-Triassic terrestrial ecosystems, Michael J. Benton, Andrew J. Newell, Graphical abstract from Gondwana Research, Volume 25, Issue 4, 2014, with permission from Elsevier.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1342937X12004169>

・No.14-II図I

沖野郷子、「第 1 章 図 1.2 地球のヒプソメトリックカーブ、地球の標高頻度分布

第 4 章 図 4.1 太平洋と大西洋の海嶺を横切る地形断面図(『海洋底地球科学』、東京大学出版会

・No.14-II図II図III

山本伸次、「図 1 世界の海洋プレート沈み込み帯(『構造浸食作用—太平洋型造山運動論と大陸成長モデルへの新視点—』所収、地学雑誌 2010 年 119 巻 6 号)」、地学雑誌

・No.15-I図I

Courtesy NASA/JPL-Caltech

・No.15-I図II

宮本英昭、橘省吾、平田成、杉田精司、「惑星地質学」、東京大学出版

・No.15-I図III

直径 1 km 以上のクレーターの数密度(「太陽・惑星系と地球 (現代地球科学入門シリーズ 1)」共立出版 2019 年 所収)諸田 智克

Neukum and Ivanov (1994)より改変

・No.15-II図I

Hutton Unconformity by James Hutton.

・No.15-II図II

Siccar

Point

<https://en.wikipedia.org/wiki/Siccar_Point#/media/File:Siccar_Point_red_capstone_closeup.jpg> Licence: CC BY-SA 4.0

・No.15-II図II★

平田大二、「Siccar Point の撮影者」、神奈川県立生命の星・地球博物館(2008)自然科学のとびら、14,2

・No.15-II図V

長谷川四郎、岡田誠、中島隆、「フィールドジオロジー2 層序と年代」、共立出版

・No.15-II図VII

A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records by Lorraine E. Lisiecki, Maureen E. Raymo from *Paleoceanography and Paleoclimatology*, Mar 2005. Reproduced with permission of Lorraine E. Lisiecki.

・No.15-II図VIII

「層序と年代 (フィールドジオロジー 2)」(共立出版 2006 年)